26. Polya-Szegö ノ Aufgaben und Lehrsätze ノ中ノ定理ニ就イテ.

豊田五浪（身延中学校）

表題ノ書物ノ第二巻ニ、十進法デ表ハサレタ素数ヲ

$$p = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \qquad (a_i \geqq 0)$$

トスルトキ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$$

ハ既約デアルト云フノガアリマスが、コヽデハ少シク拡張シタ形デ述ベテ見タイト思ヒマス。思ヒ違ヒカモ知レマセンノデソノ点御評願ヒ

次ニ結論カラ先ニ述ベルト、

$\boxed{\text{定理}}$ 素数ヲ十進法デ表ハシタ結果ヲ

$$P = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots\cdots a_n \quad (a_i \geqq 0) \cdots\cdots \quad (1)$$

トスルト、

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n$$

ハ（勿論有理数体ニ於テ）既約デアル。但シ $t \geqq 4$.

ト (1)が可約ナリトスレバ

$$f(x) = g(x)\,h(x)$$
$$g(x) = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots\cdots + b_l$$
$$h(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + c_m$$

$P = f(t) = g(t)\,h(t)$ デスカラ $g(t) = \pm p$, $h(t) = \pm 1$ トシテオイテヨロシイ。要ヲトルトキハ -1 ヲカケテオケバヨイカラ $g(t) = p$, $h(t) = 1$ トシテモ一般性ハ失ハレマセン。-1 ヲカケタ解ニ b_0 ガ負ニナッタトスルト $g(x) \longrightarrow -\infty$ $(x \to +\infty)$ トナル. $g(t) = p$ ヨリ $-g(x)$ ハ正ノ実根ヲ持ツ。然ルニ仮定ニヨレバ $a_x = 0$ ダカラ $f(x) = 0$ ハ正ノ実根ヲモ今マセン。故ニ $b_0 > 0$ a_0 ニ就イテモ同様。

$f(x) = 0$ ノ任意ノ根ハヨク知ラレタ Cauchy ノ定理ニヨッテ

$$|\alpha| \leqq 1 + \mathrm{Max}\frac{a_i}{a_0} \leqq 1 \pm (t-1) = t \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

故ニ $a_0 \geqq 2$ トスルト

$$|\alpha| \leqq 1 + \frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{2}$$

$t = 4$ ナル限実カラ $\quad \dfrac{t+1}{2} < t-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$

従ッテ $|\alpha| < t-1$

故ニ $f(x) = 0$ ノ根ハ複素数平面上原点ヲ中心半径 t ナル円（周ヲ含メテ）内ニアリマス。$h(x) = 0$ ノ根ヲ α_i $(i = 1, \cdots, n)$ トシマスト

$$h(t) = c_0 (t - \alpha_1) \cdots\cdots (t - \alpha_n) = 1$$

$$c_0 \pi |t - \alpha_i| = 1$$

c_0 ハ勿論正整数デアルカラ少ナクトモ一ツノ α_i ニ就イテ

$$|t-\alpha_i| \geqq 1$$

トナリ．tヲ中心トシテ［第一図］半径1ナル円ヲ画クトソノ円内（周ヲ含メテ）ニ$h(x)=0$ノ根ガ存在スルコトニナリマスカラ．ソレヲ改メテαトスレバ $|\alpha| \geqq t-1$（$t-1$ ハ $h(x)=0$ ノ根デナイ）

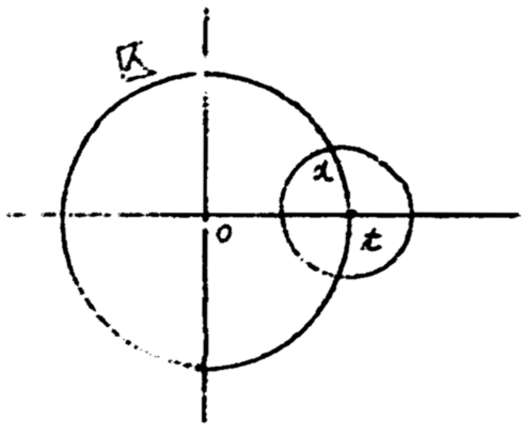

fig. 1

ダカラ $a_0 \geqq 2$ ナラバ(3)ヨリ不都合ヲ生ジマス。依ッテ改メテ

$a_1=1$ トスルト

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

$$g(x)=x^l+b_1x^{l-1}+\cdots\cdots+b_l$$

$$h(x)=x^m+c_1x^{m-1}+\cdots\cdots+c_m$$

次ニ $h(t)=1$ ヨリ $h(x)=(x-t)Q(x)+1$ ト書ケ、$Q(x)$ ハ整係数ノ多項式デアル，

$$Q(x)=x^{m-1}+g\,x^{m-2}+\cdots\cdots+g_{m-1}$$

ソシテ

$$h(x)=x^m+\cdots\cdots+(1-tg_{m-1})$$

故ニ

$$c_m = 1-tg_{m-1}$$

故ニ

$$b_l c_m = b_l(1-tg_{m-1}) = a_n$$

$$\therefore \quad |b_l|\cdot|1-tg_{m-1}| = a_n$$

$a_n \neq 0$ ハ明ラカデ且ツ $a_n \geqq t-1$．従ツテ $g_{m-1}=0$，$b_l=a_n$ カ．$g_{m-1}=1$ $b_l=-1$．後者ナラバ $x=0$ ノ時 $g(x)=-1<0$，一方 $g(t)=p>0$ デ $g(x)=0$ 即チ $f(x)=0$ ガ正根ヲ有スルコトニナル矛盾．故ニ

$$h(x)=(x-t)Q(x)+1$$

$$g(x)=x^l+\cdots\cdots+a_n$$

トナリマス。然ルトキハ $f(0)=g(0)=a_n$ トナリ、$h(0)=1$

トナラネバナリマセンカラ $Q(x)$ ハ更ニ x デ割レテ結局

$$h(x) = x(x-t)Q_1(x) + 1 \cdots\cdots\cdots (4)$$

然ルニ図ニヨツテ明ナル如ク円区外ニ $f(x)=0$ ノ根ハナイカラ $|h(x)| = \prod|x-\alpha_i|$ ハ x ガ $(t-\varepsilon, +\infty)$ ニ於テ $t-\varepsilon$ ヨリ次第ニ増加スルトキハ増加シマス・但シ ε ハ非常ニ小サイ正数。$h(t)=1>0$ ヨリ $h(x)$ 自身ガ $x=t$ ニ於テ増加ノ状態ニアリマス。何者、モシ減少ノ状態ニアルトスルト $t<x$ ニ於テハ勿論 $h(x)=0$ ノ根ハナイカラ $h(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ ヨリ途ニハ $h(\gamma)=1$ ガ $t<\gamma$ ニ就イテ成立スルコト ナルガ、ヨク知ラレタ yasoi ノ定理ニヨリ $h(x)=0$ ノスベテノ根ヲ含ム円区外ニ $h'(x)=0$ ノ様ガアルコトニナリ矛盾ヲ生ズル・従ツテ

$$h'(t) > 0 \cdots\cdots\cdots (5)$$

一方(4)ヨリ

$$h'(t) = tQ_1(t)$$ ［但シ之レハ餘計ノ事ノ様デス］

故ニ $Q_1(t)>0$ トナリマス。サテ $h(t-1)>0$ ナルコトハ明ラカデ然カモ正整数ナル故

$$h(t-1) \geqq 1 \cdots\cdots\cdots (6)$$

(5) ニヨレバ $h(t-\varepsilon)<1$ ナル $\varepsilon\,(>0)$ ガ存在シマスカラ (5) (6) ヨリ $h(\beta)=1$ $(t-1 \leqq \beta < t)$ ナル β ガ存在シナケレバナリマセン。ソコデ

$$h(\beta) = 1 \cdots\cdots\cdots (7)$$

$h(t)=1$ ト (7) トカラ

$$\prod|t-\alpha_i| = \prod|\beta-\alpha_i| = 1$$

今、線分 βt ノ垂直二等分線 l ヲ引クト（第二図参照）l ノ左側ニ悉ク α_i ガ存在スルモノトシマスト

$$|t-\alpha_i| \geqq |\beta-\alpha_i| \quad (i=1,\cdots,n)$$

トナリ上ノ式ハ不成立。故ニ l ノ右側ニ少ナクトモ一ツノ α_i ガ存在シナケレバ

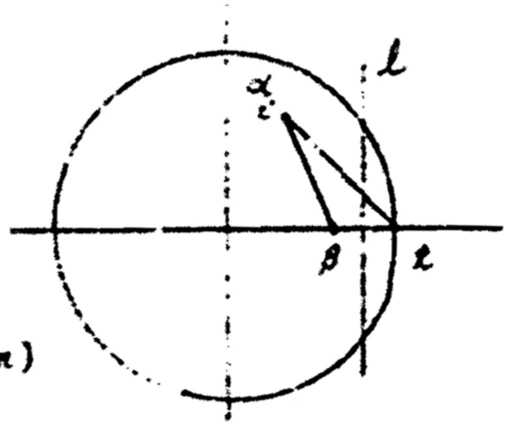

fig. 2

ナラナクナリ．ソレヲϑトシマスト．$\beta \geqq t-1$ダカラ

$$|\vartheta| \geqq t-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ガ成立シマス。

II．サテ$f(x)=0$ノ根デアルα_iニ就イテハ

$$x^n-a_1x^{n-1}\cdots\cdots-a_n=0$$

ノ唯一ノ正根ヲρトシマスト（Cauchy）

$$|\alpha_i| \leqq \rho$$

先ヅ$a_1 \neq 0$．何トナレバモシ$a_1=0$ナラ

$$(t-1)^n-a_2(t-1)^{n-2}-\cdots\cdots a_n \geqq (t-1)^n-(t-1)\left[\frac{(t-1)^{n-1}-1}{t-2}\right]$$

$$\geqq \frac{(t-1)^n(t-3)+(t-1)}{t-2}$$

$t \geqq 4$ヨリ $\qquad > 0$

トナリ之レハ(8)ニ矛盾シマス。次ニ$a_2=0$ナラ

$$x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots\cdots\cdots-a_n$$

$$\geqq x^n-(t-1)x^{n-1}-(t-1)\left[\frac{x^{n-2}-1}{x-1}\right]$$

$$\geqq \frac{[(x-1)x^2-(t-1)\{x(x-1)+1\}]x^{n-2}+(t-1)}{x-1}$$

然ルニ$x=t-\frac{1}{2}$ノ時ハ$(x-1)x^2>(t-1)\{x(x-1)+1\}$即チ$x>(t-1)\left\{1+\frac{1}{x(x-1)}\right\}$ガ$t \geqq 4$ナラバ成立シマスカラ $\qquad >0$

之レモ(8)ニ矛盾シマス。從ツテ$a_1 \neq 0$，$a_2 \neq 0$

$f(x)=0$ニ於テ．$x=(t-1)z$トオクト

$$(t-1)^nz^n+(t-1)^{n-1}a_1z^{n-1}+(t-1)^{n-2}a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

之レヲ改メテ

$$f^*(z)=z^n+\frac{a_1}{t-1}z^{n-1}+\frac{a_2}{(t-1)^2}z^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{(t-1)^n}=0$$

ト書キ．ヨク知ラレタMontelノ定理ヲ適用シマスト．根α^*ニ就

イテ。

$$|\alpha^*| \leqq \left|1-\frac{a_1}{t-1}\right| + \left|\frac{a_1}{t-1}-\frac{a_2}{(t-1)^2}\right| + \left|\frac{a_2}{(t-1)^3}-\frac{a_4}{(t-1)^4}\right| + \cdots$$

$$\cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{(t-1)^{n-1}}-\frac{a_n}{(t-1)^n}\right| + \left|\frac{a_n}{(t-1)^n}\right|$$

$a_i \leqq t-1$ ヨリ 0デナイ a_i ニ就イテ

$$1 \geqq \frac{a_1}{t-1} \geqq \frac{a_2}{(t-1)^2} \geqq \cdots \geqq \frac{a_i}{(t-1)^i} \geqq \frac{a_{i'}}{(t-1)^{i'}} \geqq \cdot$$

デアルコトが分カルカラ

$$|\alpha^*| \leqq 1-\frac{a_1}{t-1} + \frac{a_1}{t-1} - \frac{a_2}{(t-1)^2} + \frac{a_2}{(t-1)^2} - \frac{a_3}{(t-1)^3} + \left|\frac{a_3}{(t-1)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{a_4}{(t-1)^4}\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{a_{n-1}}{(t-1)^{n-1}} - \frac{a_n}{(t-1)^n}\right| + \frac{a_n}{(t-1)^n}$$

コヽデ $a_3=0$ デモ，0デナクトモ

$$|\alpha^*| \leqq 1+\frac{2(t-1)}{(t-1)^4}\left[1+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\cdots\right] \leqq 1+\frac{2}{(t-1)^2(t-2)}$$

故ニ $|\alpha^*|\cdot(t-1) \leqq t-1+\dfrac{2}{(t-1)(t-2)}$

然ルニ $t \geqq 4$ ヨリ右辺ノ第二項ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小トナリ

$$|\alpha_i| \leqq t-\frac{1}{2}$$

之レヌ (8) ト矛盾シマス，結局 $t \geqq 4$ ノ時ハ $f(x)$ ハ既約

［$t=2.3$ ノ場合が残サレタコトニナリマスが、コノ様ナコトハ既ニ分ツテ居ルノデセウカ。御教示下サイ。］

前略、先日投稿シマシタ時 Aufgaben が手許ニナク、ウクウカト理リツドイ証明ヲ述ベテ申訳アリマセン。サテ Pólya ノ本ヲヨク見ルト、ソコノ $t=10$ ノ証明ハ $t \geqq 3$ ナラバ当テハマルコトヲ知リ $t=2$ ナラバ、少シク Modify スレバ出来ルコトニ気付イタノデ、コヽニ記シテ御高評ヲ戴ク次第デス。要スルニ Pólya ノ方法が数録ト秀レテ居タノデシタ。

$t \geqq 3$トシマス。

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ノ根ノ中デ実部ガ正ナルモノニ就イテハ

$$|\alpha| < \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2} \qquad \left[\, t=10 \text{ ナラバ } \frac{1+\sqrt{37}}{2} \,\right]$$

然ルニ

$$t-\frac{1}{2} > \frac{1+\sqrt{4t-3}}{2} \qquad (t \geqq 3)$$

一方ニ於テ (1) ノ一根 ϑ ニツイテハ、$|\vartheta|>t-\frac{1}{2}$ ガ成立スルコトハ先ニ述ベタ通リデスカラ $f(x)$ ハ既約

$t=2$ ノ時

$$f(x)=x^n+\varepsilon_1x^{n-1}+\varepsilon_2x^{n-2}+\cdots\cdots+1 \cdots\cdots (2)$$

$$(\varepsilon_i \text{ ハ } 0 \text{ 又ハ } 1)$$

トスルト．$n=2$ ニ対スル素数ハ 5ト7．ソシテソレニ対スル多項式ハ x^2+1，x^2+x+1． トナリマスカラ問題外．故ニ $n \geqq 3$ トシテ

$$\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \geqq R\left\{1+\frac{\varepsilon_1}{x}+\frac{\varepsilon_2}{x^2}\right\}-\frac{1}{|x|^3}-\cdots\cdots-\frac{1}{|x|^n}$$

$$> R\left\{1+\frac{\varepsilon_1}{x}+\frac{\varepsilon_2}{x^2}\right\}-\frac{1}{|x|^3-|x|^2}$$

x ノ代リニ ϑ ヲ代入スルト

$$0 > R\left\{1+\frac{\varepsilon_1}{\vartheta}+\frac{\varepsilon_2}{\vartheta^2}\right\}-\frac{1}{|\vartheta|^3-|\vartheta|^2}$$

$|\vartheta|>2-\frac{1}{2}=1.5$ ナルコトハ全ク $t \geqq 3$ ノ場合ト同様デスカラ ϑ ノ偏角ガ $\frac{\pi}{4}$ ヲ超エナイ．即チ ϑ^2 ノ偏角ガ $\frac{\pi}{2}$ ヲ超エナイコトガ容易ニ証明出来テ

$$R\left\{1+\frac{\varepsilon_1}{\vartheta}+\frac{\varepsilon_2}{\vartheta^2}\right\} \geqq 1$$

$$\therefore \quad 0 > 1-\frac{1}{|\vartheta|^3-|\vartheta|^2}$$

然ルニ $|\vartheta|>1.5$ ナラバ之レハ成立シマセン．故ニ (2) モ既約。